

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ  
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ  
ТАДЖИКИСТАН  
МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«РОССИЙСКО-ТАДЖИКСКИЙ (СЛАВЯНСКИЙ) УНИВЕРСИТЕТ»

ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНЫЙ ФАКУЛЬТЕТ  
КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ

«УТВЕРЖДАЮ»

«29» августа 2025 г.

Зав. кафедрой *Гулбоев* Гулбоев Б.Дж.

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**  
по учебной дисциплине (модулю)

**«Избранные главы функционального анализа»**  
Направление подготовки - 01.04.01 «Математика»  
Программа магистратуры – «Фундаментальная математика»  
Форма подготовки - очная  
Уровень подготовки - магистр

Душанбе – 2025

**ПАСПОРТ  
ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

по дисциплине (модулю) «Избранные главы функционального анализа»

№ п/п	Контролируемые разделы, темы, модули	Формируемые компетенции	Оценочные средства		
			Количество тестовых заданий	Другие оценочные средства	
				Вид	Количество
1.	Основные структуры функционального анализа	ПК-2		Перечень вопросов для устного опроса, Задания для СР	5 10
2.	Топологические пространства	ПК-2		Перечень вопросов для устного опроса, Задания для СР	7 6
3.	Компактность в топологических и метрических пространствах	ПК-2		Перечень вопросов для устного опроса, Задания для СР	3 8
4.	Конструкция пространств Лебега	ПК-2		Перечень вопросов для устного опроса, Задания для СР	6 7
5.	Нормированные и банаховы алгебры	ПК-2		Перечень вопросов для устного опроса, Задания для СР	4 9
6.	Вполне непрерывные операторы	ПК-2		Перечень вопросов для устного опроса, Задания для СР	5 8
Всего:					78

## ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ДЛЯ УСТНОГО ОПРОСА

по дисциплине (модулю) «Избранные главы функционального анализа»

### Формируемые компетенции

код	Формируемая компетенция	Этапы формирования компетенции	Содержание этапа формирования компетенции	Вид оценочного средства
ПК-2	способность к организации научно-исследовательских и научно-производственных работ, управлению научным коллективом	Начальный этап (знания)	Знает/ИПК-2.1: $n$ -мерное евклидово пространство, предел и непрерывность функции $n$ переменных	Устный опрос
		Продвинутый этап (навыки)	Умеет/ИПК-2.2: дифференцировать и интегрировать функции многих переменных	Контроль самостоятельной работы.
		Завершающий этап (умения)	Владеет/ИПК-2.3: навыками нахождения локальных экстремумов функции многих переменных	Контроль самостоятельной работы

1. Метрические и предметрические пространства
2. Нормированные и преднормированные пространства
3. Пространства со скалярным произведением и взаимосвязь между данными типами пространств
4. Сравнение топологий
5. Индуцированная топология
6. Замыкание
7. Отделимость
8. Полнота метрического пространства
9. Базы и предбазы топологии
10. Сходимость в топологических пространствах
11. Свойства компактов
12. Связь с аксиомами отделимости
13. Характеризация компактов в метрических пространствах
14. Критерии компактности в конкретных нормированных пространствах
15. Прямые суммы и пересечения подпространств преднормированного пространства
16. Факторпространство по подпространству преднормированного пространства
17. Критерий нормируемости факторпространства
18. Иллюстрация общей конструкции построения факторпространства в случае пространств Лебега
19. Кольца и их основные свойства
20. Нормированные и банаховы алгебры

21. Инволютивные
22. Звёздные и  $C^*$ -алгебры
23. Примеры классических банаховых алгебр
24. Идеалы и факторалгебры банаховых алгебр
25. Начала спектральной теории для коммутативных банаховых алгебр
26. Вполне непрерывные операторы и их свойства
27. Три теоремы Фредгольма
28. Случай конечномерного оператора
29. Спектральная теория вполне непрерывных операторов.

### **Критерии оценки:**

- оценка **«отлично»** выставляется студенту, если:

- 1) полно и аргументированно отвечает по содержанию задания;
- 2) обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только по учебнику, но и самостоятельно составленные;
- 3) излагает материал последовательно и правильно.

- оценка **«хорошо»**, если студент дает ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для оценки «5», но допускает 1-2 ошибки, которые сам же исправляет.

- оценка **«удовлетворительно»**, если студент обнаруживает знание и понимание основных положений данного задания, но:

- 1) излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий или формулировке правил;
- 2) не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры;
- 3) излагает материал непоследовательно и допускает ошибки.

- оценка **«неудовлетворительно»**, если студент обнаруживает незнание ответа на соответствующее задание, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, беспорядочно и неуверенно излагает материал; отмечаются такие недостатки в подготовке студента, которые являются серьезным препятствием к успешному овладению последующим материалом.

- оценка **«зачтено»** выставляется студенту, если

Полное верное решение. В логическом рассуждении и решении нет ошибок, задача решена рациональным способом. Получен правильный ответ. Ясно описан способ решения.

- оценка **«не зачтено»**

Решение неверное или отсутствует

# ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

по дисциплине (модулю) «Избранные главы функционального анализа»

## Формируемые компетенции

код	Формируемая компетенция	Этапы формирования компетенции	Содержание этапа формирования компетенции	Вид оценочного средства
ПК-2	способность к организации научных исследований и научно-производственных работ, управлению научным коллективом	Начальный этап (знания)	Знает/ИПК-2.1: n-мерное евклидово пространство, предел и непрерывность функции n переменных	Устный опрос
		Продвинутый этап (навыки)	Умеет/ИПК-2.2: дифференцировать и интегрировать функции многих переменных	Контроль самостоятельной работы.
		Завершающий этап (умения)	Владеет/ИПК-2.3: навыками нахождения локальных экстремумов функции многих переменных	Тестирование

1.

Если  $\rho$  – метрика на множестве  $X$ , то

$$2. \quad \forall x, y \in X \quad \rho(x, y) \geq 0.$$

Если  $\|\cdot\|$  – норма на линейном пространстве  $X$ , то

$$\forall x \in X \quad \|x\| \geq 0.$$

Пусть  $X$  – метрическое пространство,  $M \subset X$ . Точка  $x_0 \in X$  является предельной точкой множества  $M$  тогда и только тогда, когда

$$3. \quad \exists \{x_n\} \subset M \setminus \{x_0\}: \quad x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0.$$

Пусть  $X$  – метрическое пространство,  $M \subset X$ . Множество  $M$  замкнуто тогда и только тогда, когда

$$4. \quad \forall \{x_n\} \subset M \quad \left( x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0 \implies x_0 \in M \right).$$

В нормированном пространстве  $\langle X, \|\cdot\| \rangle$  справедливо неравенство

$$5. \quad \forall x, y \in X \quad \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Может ли нормированное пространство

6. а) состоять из одного элемента? б) быть счетным?

Доказать, что функция

$$\rho(n, m) = \begin{cases} 0, & n = m, \\ 1 + \frac{1}{n+m}, & n \neq m, \end{cases}$$

7. задает метрику на множестве  $\mathbb{N}$  натуральных чисел.

Указать необходимое и достаточное условие на отображение  $f: X \rightarrow \mathbb{P}$ , при котором формула из задачи 1.14

8. задает метрику на  $X$ .

Пусть  $x \in \ell_p^m$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Доказать, что

9. 
$$\|x\|_{\ell_\infty^m} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_{\ell_p^m}.$$

Доказать, что в любом нормированном пространстве  $X$

10. 
$$\forall x \in X \forall r > 0 \quad \text{diam } B(x, r) = 2r.$$

Сходимость последовательности в пространствах  $s$  и  $\ell_p^m$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , эквивалентна покоординатной сходимости.

11. Пусть  $X, Y$  – линейные нормированные пространства,  $\tau$  – линейная биекция  $X$  на  $Y$ . Пространства  $X$  и  $Y$  линейно гомеоморфны тогда и только тогда, когда существуют такие константы  $c_1, c_2 > 0$ , что для любого  $x \in X$

12. 
$$c_1 \|x\|_X \leq \|\tau(x)\|_Y \leq c_2 \|x\|_X.$$

Пусть  $X$  – нормированное пространство,  $X_0$  – его конечномерное линейное подмножество. Тогда  $X_0$  замкнуто в  $X$ .

13. Доказать, что если  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$  в пространстве  $L_p[a, b]$  и существует подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$  такая, что  $x_{n_k}(t) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y(t)$  почти всюду на  $[a, b]$ , то  $x = y$  в  $L_p[a, b]$ .

14. Пространства  $\ell_p^m$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ),  $\ell_p$  ( $1 \leq p < \infty$ ),  $c_0$ ,  $c$ ,  $C^{(k)}[a, b]$ ,  $C[a, b]$ ,  $L_p[a, b]$  ( $1 \leq p < \infty$ ) сепарабельны.

15. Пусть метрические пространства  $X$  и  $Y$  гомеоморфны. Тогда если одно из них сепарабельно, то сепарабельно и другое.

16. Пусть  $\langle X, \rho \rangle$  – полное метрическое пространство и  $M \subset X$ . Пространство  $\langle M, \rho \rangle$  полно тогда и только тогда, когда множество  $M$  замкнуто в  $X$ .

17. В цепочках пространств из задач 2.20, 2.25 найти пополнение предыдущего по норме последующего. Например, для пары  $\ell_1 \subset \ell_p$  нужно найти пополнение пространства  $X = \{x = \{\xi_k\} : \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| < \infty\}$  по норме  $\|x\|_p = (\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p)^{1/p}$ .

18. Пусть отображение  $F: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  определено формулой  $(Fx)(t) = f(x(t))$ , где  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Доказать, что отображение  $F$  непрерывно (равномерно непрерывно) на  $C[a, b]$  тогда и только тогда, когда функция  $f$  непрерывна (равномерно непрерывна) на  $\mathbb{R}$ .

Будет ли отображение  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  сжимающим на множестве  $M \subset \mathbb{R}$ , если  $Fx = x^3$ , метрика на  $\mathbb{R}$  естественная,

20. а)  $M = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ; б)  $M = [0, 2]$ ; в)  $M = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ?

Пусть  $\langle X, \rho \rangle$  – полное метрическое пространство и отображение  $f: X \rightarrow X$  таково, что некоторая его степень  $g = f^n$  является сжимающим отображением.

21. Тогда уравнение  $fx = x$  имеет единственное решение.

- Пусть на множестве  $X$  заданы метрики  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , причем  $\rho_1 \succeq \rho_2$ . Доказать, что из предкомпактности (компактности) множества  $M$  в метрическом пространстве  $\langle X, \rho_1 \rangle$  следует предкомпактность (компактность)  $M$  в метрическом пространстве  $\langle X, \rho_2 \rangle$ .
- 22.
- Доказать, что шары  $B[x_0, r]$ ,  $B(x_0, r)$  из нормированного пространства выпуклы. Будет ли выпуклым множеством сфера  $S[x_0, r]$ ?
- 23.
- В пространстве  $\ell_1$  найти плотное выпуклое множество, не совпадающее с  $\ell_1$ .
- 24.

### Критерии оценки:

- оценка «**отлично**» выставляется студенту, если:

- 1) полно и аргументированно отвечает по содержанию задания;
- 2) обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только по учебнику, но и самостоятельно составленные;
- 3) излагает материал последовательно и правильно.

- оценка «**хорошо**», если студент дает ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для оценки «5», но допускает 1-2 ошибки, которые сам же исправляет.

- оценка «**удовлетворительно**», если студент обнаруживает знание и понимание основных положений данного задания, но:

- 1) излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий или формулировке правил;
- 2) не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры;
- 3) излагает материал непоследовательно и допускает ошибки.

- оценка «**неудовлетворительно**», если студент обнаруживает незнание ответа на соответствующее задание, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, беспорядочно и неуверенно излагает материал; отмечаются такие недостатки в подготовке студента, которые являются серьезным препятствием к успешному овладению последующим материалом.

- оценка «**зачтено**» выставляется студенту, если

Полное верное решение. В логическом рассуждении и решении нет ошибок, задача решена рациональным способом. Получен правильный ответ. Ясно описан способ решения.

- оценка «**не зачтено**»

Решение неверное или отсутствует

**Итоговая система оценок по кредитно-рейтинговой системе с  
использованием буквенных символов**

<b>Оценка по буквенной системе</b>	<b>Диапазон соответствующих наборных баллов</b>	<b>Численное выражение оценочного балла</b>	<b>Оценка по традиционной системе</b>
<b>A</b>	10	95-100	Отлично
<b>A-</b>	9	90-94	
<b>B+</b>	8	85-89	Хорошо
<b>B</b>	7	80-84	
<b>B-</b>	6	75-79	
<b>C+</b>	5	70-74	Удовлетворительно
<b>C</b>	4	65-69	
<b>C-</b>	3	60-64	
<b>D+</b>	2	55-59	
<b>D</b>	1	50-54	
<b>Fx</b>	0	45-49	Неудовлетворительно

Составитель \_\_\_\_\_ (подпись)